Wallis : des " têtes rondes " aux intégrales

Claire David

Wallis : des « têtes rondes » aux intégrales

Claire David

30 décembre 2013

Sorbonne Universités - Université Pierre et Marie Curie-Paris 6
Laboratoire Jacques Louis Lions - UMR 7598
Boîte courrier 187, 4 place Jussieu, F-75252 Paris cedex 05, France

AMS Subject Classification : 00A05, 26A42.

1 Introduction - Quelques éléments pour une courte biographie

On ne connaît pas toujours bien l'histoire du mathématicien anglais John Wallis. Fils de pasteur, il naît à Ashford, en Angleterre, en 1616. Précoce et brillant, il suit, de 1631 à 1632 une solide formation en latin, grec et hébreux, puis entre à l'Université (Emmanuel College, puis Queen's College, Cambridge), à l'âge de 16 ans, où il étudie des sujets aussi divers que la morale, la métaphysique, la géographie, l'astronomie, et la médecine. En 1640, une fois ses études terminées, il est ordonné chapelain de Butterworth, dans le Yorkshire.
En 1642, au hasard d'une lettre chiffrée, il commence à s'intéresser à la cryptographie, et en devient vite un spécialiste. En cette période de guerre civile - les royalistes s'opposent aux parlementaires menés par le général Cromwell - il met alors ses talents dans ce domaine au service de ces derniers, surnommés les « Têtes rondes », en raison de la coupe de cheveux courte adoptée par un certain nombre de ces parlementaires, par opposition aux longues chevelures bouclées abrborées à la cour.
En 1645, il abandonne le clergé, se marie, et rejoint, à Londres, un petit groupe de scientifiques, qui va bientôt constituer la « Royal Society ».
En 1647, il découvre l'œuvre de William Oughtred, « Clavis Mathematicae », qui lui fait prendre conscience de son goût pour les Mathématiques. De son propre aveu, il lui faut à peine quelques semaines pour complètement maîtriser l'œuvre d'Oughtred, et commencer à produire la sienne. Il commence par un traité de géométrie plane (« Treatise of Angular Sections »), qui, même s'il ne fut pas immédiatement publié, présente des résultats remarquables. En même temps que le mathématicien Thomas Harriot (1560-1621), il propose des méthodes de résolution des équations du quatrième degré.
En 1649, il est nommé à la chaire savilienne de géométrie d'Oxford par le général

Cromwell, mais, curieusement, plus à cause de son soutien à ce dernier, que pour ses aptitudes ! Il est ultérieurement confirmé dans ses fonctions par le roi Charles II lors de son avénement, qui va plus loin en le nommant chapelain royal en 1661. Il est à noter que c'est le titre de « Professeur de géométrie » qui marque encore, de nos jours, les travaux de John Wallis. De façon amusante, ses ouvrages originaux, que l'on peut consulter à la BNF, précisent toujours, « John Wallis, Professeur de géométrie ».
Avant Newton, John Wallis est l'un des plus grands mathématicien anglais. Ses contributions sont nombreuses, tant en Analyse (voir, par exemple, « Arithmetica infinitorum »([1]), qu'en géométrie, puisqu'il fut, de fait, l'un des premiers initiateurs de la géométrie analytique, dont on peut trouver de nombreuses applications dans son « Traité sur les sections coniques » (1655, [2]), où il étudie les intersections de cônes et de plans.
John Wallis est l'un des premiers à diffuser, dans son pays, les techniques de calcul développées par René Descartes. Ce faisant, il en profite pour introduire le symbole ∞ [2], qui correspond, aussi, à la lemniscate de Bernoulli, courbe fermée que l'on peut parcourir un nombre infini de fois ...

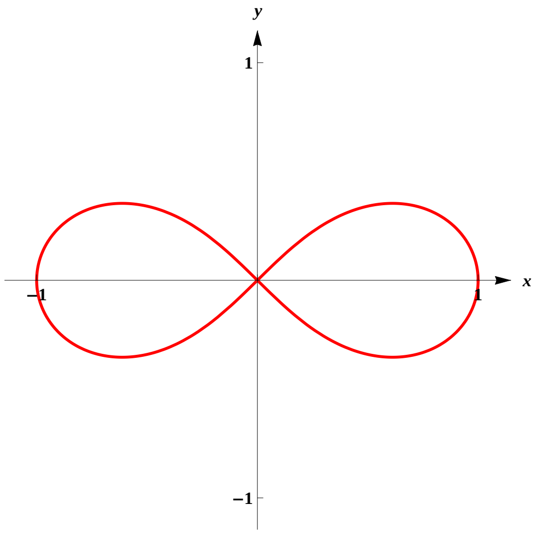

FIGURE 1 – La lemniscate de Bernoulli

Précurseur, il est aussi le premier à introduire le terme de « fraction continue », dans « Opera Mathematica » [3].

Son influence sur ses contemporains est essentielle. La lecture d'Arithmetica Infinitorum ([1], [5]) contribue, pour beaucoup, aux réflexions d'Isaac Newton, réflexions qui le menèrent notamment à sa formule du binôme. La renommée de Newton parvient rapidement aux oreilles de John Wallis, et une correspondance fructueuse s'établit entre les deux scientifiques, Wallis devenant, de fait, l'éditeur des travaux de Newton ([6]). Il est à noter que la publication d'extraits d'articles de Newton figurant dans « Algebra » et « Opera Mathematica » joue, au moment de la querelle de propriété opposant Newton à Leibniz sur le calcul infinitésimal, un rôle fondamental ([6],[7] [8], [9], [10]).

John Wallis est également un astronome reconnu [4]. Lors du transit de Vénus, en 1639, il contribue au calcul des éphémérides. En 1692, il résout le « problème de la voûte quarrable », qui consiste à trouver, dans une voûte hémisphérique, une fenêtre telle que que le reste de la voûte soit quarrable, i.e. dont on puisse calculer l'aire (le lecteur intéressé trouvera de plus amples informations sur les surfaces quarrables dans [11] ; il est à noter que ce problème a aussi été traité, la même année, par Gottfried Wilhelm Leibniz et Jean Bernoulli).

En parallèle de son travail mathématique, John Wallis s'intéresse aussi, de très près, à la phonétique, et écrit le premier traité sur le sujet, en introduction à son ouvrage « Grammatica Linguæ Anglicanæ » [12]. Il est considéré comme un des précurseurs de l'orthophonie. Il est aussi l'auteur d'ouvrages religieux, le traducteur d'œuvres anciennes (l' « Harmonique », de Ptolémée [13], le traité d'Aristarche « Sur l'ampleur des distances de la terre et la lune », et l'« Arénaire » d'Archimède), et un des premiers historiens des sciences !

2 Les intégrales de Wallis : un nouveau calcul dans le cas des termes d'indices pairs

Les intégrales de Wallis, introduites par John Wallis, font partie des grands « classiques » des problèmes de calcul d'intégrales. On rappelle leur expression :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, dt\,, \quad J_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, dt\,. \tag{1}$$

Un simple changement de variable montre directement que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,: I_n = J_n\,. \tag{2}$$

La technique « classique » consiste à obtenir une relation de récurrence entre, respectivement, I_{n+2} et I_n, $n \in \mathbb{N}$, J_{n+2} et J_n, $n \in \mathbb{N}$, à l'aide d'une double intégration par parties :

$$\forall\, n \in \mathbb{N} \,:\, I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}\, I_n \tag{3}$$

Compte tenu de $I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et $I_1 = 1$, on en déduit facilement les expressions respectives de $I_{2\,p}$ et $I_{2\,p+1}$, $p \in \mathbb{N}$:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,p} t\, dt = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2p-1)}{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2\,p}\, \frac{\pi}{2} = \frac{(2\,p)\,!}{2^{2\,p}\,(p\,!)^2}\, \frac{\pi}{2} \tag{4}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2\,p+1} t\, dt = \frac{2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times (2\,p)}{1 \times 3 \times 5 \times \ldots \times (2\,p+1)} = \frac{2^{2\,p}\,(p\,!)^2}{(2\,p+1)\,!} \tag{5}$$

Il existe toutefois une méthode de calcul direct des termes d'indice pair $I_{2\,p}$, $p \in \mathbb{N}$, qui ne semble pas exister dans la littérature.

Il suffit de remarquer que, pour tout entier naturel p, on peut écrire, grâce aux formules d'Euler et à la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi} \cos^{2p} t \, dt &= \int_0^{\pi} \left(\frac{e^{i\,t} + e^{-\,i\,t}}{2} \right)^{2p} dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{i\,(2p-k)\,t} \, e^{-\,i\,k\,t} \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2^{2p}} \sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} e^{i\,(2p-2k)\,t} \, dt \\
&= \int_0^{\pi} \frac{1}{2^{2p}} \binom{2p}{p} dt \\
&= \frac{\pi}{2^{2p}} \binom{2p}{p}
\end{aligned} \tag{6}$$

où, pour tout entier k de $\{0, \ldots, 2\,p\}$, $\binom{2p}{k}$ est le coefficient binomial $\dfrac{(2\,p)\,!}{(2\,p-k)\,!\,k\,!}$.

Il est à noter que ne subsiste, de la somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} \int_0^{\pi} e^{i\,(2p-2k)\,t} \, dt$, que le terme correspondant à $k = p$, puisque, pour tout entier naturel non nul n :

$$\int_0^{\pi} e^{i\,n\,t} \, dt = 0 \tag{7}$$

Compte tenu de

$$\int_0^{\pi} \cos^{2p} t \, dt = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt \tag{8}$$

on obtient bien :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p} t \, dt = \frac{\pi}{2^{p+1}} \binom{2p}{p} = \frac{\pi}{2^{p+1}} \frac{(2\,p)\,!}{(p\,!)^2} \tag{9}$$

Remerciements

L'auteur tient à remercier le referee anonyme pour ses très judicieuses suggestions.

Références

[1] John Wallis, The arithmetic of infinitesimals, 1656, traduction du latin vers l'anglais, New York : Springer, 2004.

[2] John Wallis, De sectionibus conicis nova methodo expositis tractatus (1655), section I, Prop. 1, page 4.

[3] John Wallis, Opera mathematica, Hildesheim ; New York : Olms, 1972.

[4] John Wallis, A Discourse of gravity and gravitation grounded on experimental observations ; presented to the Royal Society, November 12, 1674, Londres : J. Martyn, 1675.

[5] Roger Godement, Analyse mathématique II : Calcul différentiel et intégral, séries de Fourier, fonctions holomorphes, Springer-Verlag (Berlin-Heidelberg), GmbH & Co. K, seconde édition, 2003.

[6] Niccolò Guicciardini, John Wallis as editor of Newton's mathematical work, Notes Rec. R. Soc., published online, 2011.

[7] A. R. Hall, Philosophers at war : the quarrel between Newton and Leibniz, Cambridge University Press, 1980.

[8] Herbert W. Turnbull, The correspondence of Isaac Newton, op. cit. (note 1), vol. 2, pages 41-47 et 149-161.

[9] Derek Thomas Whiteside, op. cit., The mathematical papers of Isaac Newton, Cambridge University Press, 1967-81, vol. 4, pages 666-674.

[10] Richard Westfall, Never at Rest : A Biography of Isaac Newton, Cambridge University Press, New Edition, 1983.

[11] Jean Favard, Exemples de surfaces quarrables, Annales de l'Ecole Normale Supérieure de Pise, Classe de Sciences, 2^{de} série, tome 4, n^{o}2, 1935, pp. 139-154.

[12] John Wallis, Grammatica Linguæ Anglicanæ, cui praefigitur de Loquela, sive Sonorum formatione tractatus grammatico-physicus, Hambourg : G. Schultzen, 1653.

[13] Athanase Papadopoulos, Degrés de complexité en géométrie et en musique, Réflexions à partir de l'harmonie du monde de Kepler, IREM, Strasbourg.